МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання розрахунково-графічної роботи по ІІІ частині курсу «Теоретичні основи електротехніки» «Розрахунок електростатичного поля»

для студентів
141 спеціальності «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 1 від 16.01.2019 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2019

Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи по III частині курсу «Теоретичні основи електротехніки» «Розрахунок електростатичного поля» для студентів 141 спеціальності «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» / уклад.: А.М. Борисенко, Б.І. Кубрик, О.Ю Кропачек, С.А. Литвиненко, О.В. Лавріненко, О.Є. Світлична, А.В. Гетьман, О.Г. Кєссаєв. – Харків. : НТУ «ХПІ», 2019. – 24 с.

Укладачі: А.М. Борисенко, Б.І. Кубрик, О.Ю Кропачек, С.А. Литвиненко, О.В. Лавріненко, О.Є. Світлична, А.В. Гетьман, О.Г. Кєссаєв.

Рецензент: Боєв В.М.

Кафедра теоретичних основ електротехніки

Вступ

Дані методичні вказівки слід розглядати як допомогу студентам при виконанні розрахунково-графічної роботи з розрахунку електростатичного поля. Оскільки в загальному випадку, при довільному розподілі зарядів і складній формі граничних поверхонь, розрахунок поля може бути виконаний лише спеціальними аналітичними або чисельними методами, які, в зв‘язку з обмеженням часу вивчення теорії електромагнітного поля, не увійшли в III частину курсу ТОЕ, студентам пропонується виконати розрахунок електростатичного поля, що має один з видів симетрії. У цьому випадку зазнає суттєвого спрощення запис всіх співвідношень і рівнянь, що описують поле. Нижче наведені основні взаємозв‘язки величин, що характеризують поле як в інваріантної формі, так і в конкретних системах координат. Крім того, наведено конкретний приклад розрахунку поля, подібний до тих завдань, які пропонуються студентам для виконання розрахунково-графічної роботи.

1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ

Електростатичне поле створюється нерухомими в просторі і незмінними в часі електричними зарядами.

Електричний заряд Q [Кл] може бути точковим, коли розмірами зарядженого тіла можна знехтувати в порівнянні з відстанями, на яких знаходиться точка спостереження, та розподіленим в просторі.

При розподілі заряду по деякому об‘ємі V сумарний заряд визначається таким чином:

$$Q = \int_V \rho dV, \qquad (1)$$

де ρ [Кл/м^3] – об'ємна щільність заряду.

Якщо в даному об’ємі ρ = const, то

$$Q = \rho V. \qquad (2)$$

Слід зауважити, що в умовах електростатики заряд може розподілятися в об’ємі лише в діелектричних тілах.

У провідних тілах заряд розподіляється по їх поверхні S, причому

$$Q = \int_S \sigma dS, \qquad (3)$$

де σ [Кл/м^2] – поверхнева щільність заряду.

Якщо на даній поверхні σ = const, то

$$Q = \sigma S. \qquad (4)$$

Напруженість електростатичного поля $\vec{E}$ [В/м] – векторна величина, що чисельно дорівнює силі, яка діяла б на одиничний точковий позитивний заряд при його переміщенні в дану точку поля, що збігається з цією силою у напрямку. Таким чином, напруженість є силовою характеристикою поля.

При переміщенні заряду в електростатичному полі відбувається робота.

Потенціал φ [В] деякої точки поля чисельно дорівнює роботі з переміщення одиничного точкового позитивного заряду з даної точки в таку фіксовану точку *P*, потенціал якої прийнятий рівним нулю:

$$\varphi_A = \int_A^P \vec{E} d\vec{l} \, . \tag{5}$$

Потенціал є енергетичною характеристикою поля.

Потенціал φ, який є функцією координати *l*, вводиться в електростатичному полі, виходячи з того, що в цьому полі виконується умова потенційності

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0 , \tag{6}$$

завдяки якій робота сил поля не залежить від шляху переміщення заряду, а визначається лише координатами кінцевих точок руху. Потенціал даної точки залежить в електростатиці тільки від координат цієї ж точки.

У речовому середовищі електростатичне поле в даній точці простору характеризується ще однією векторною величиною – електричним зміщенням $\vec{D}$ [Кл/м^2], пов'язаним з напруженістю поля $\vec{E}$ таким чином:

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} , \tag{7}$$

де ε_a [Ф / м] – абсолютна діелектрична проникність середовища;
ε – відносна діелектрична проникність (безрозмірна величина);
ε_0 – електрична стала:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 8{,}86 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м.}$$

Крім рівняння (6), одним з основних рівнянь електростатичного поля в інтегральній формі запису є постулат Максвелла:

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = Q_0 , \tag{8}$$

або теорема Гаусса:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{Q_0}{\varepsilon_a}. \qquad (9)$$

Вирази (8) і (9) ідентичні, якщо урахувати співвідношення (7). У диференціальній формі теорема Гаусса має такий спосіб запису:

$$\vec{D} = \rho \qquad (10)$$

або

$$\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_a}, \qquad (11)$$

а рівняння потенційності (6) набуває вигляду:

$$\mathrm{rot}\ \vec{E} = 0. \qquad (12)$$

Оскільки, як відомо з математики:

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{grad}\ \varphi \equiv 0, \qquad (13)$$

то між напруженістю поля і його потенціалом можна встановити диференціальний зв‘язок:

$$\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\ \varphi. \qquad (14)$$

Знак «–» в рівнянні (14) говорить про те, що вектор $\vec{E}$ вказує напрямок найбільш швидкого зменшення потенціалу.

Підставивши (14) в (11), отримаємо рівняння Пуассона для електростатичного поля:

$$\mathrm{grad}\,\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}, \qquad (15)$$

яке в областях, де $\rho = 0$, переходить в рівняння Лапласа:

$$\mathrm{grad}\ \varphi = 0. \qquad (16)$$

В теорії електромагнітного поля існує теорема єдності, сенс якої полягає в тому, що розв’язання рівняння Пуассона (15) або Лапласа (16), яке задовольняє також граничним умовам, є єдиним розв’язанням задачі електростатики.

В електростатичному полі на межі двох середовищ виконуються такі граничні умови:

1) безперервність тангенційних складових вектору напруженості

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \tag{17}$$

де індекс τ означає складову вектора $\vec{E}$, тангенціальну до межі розділу середовищ.

Умова (17) рівносильна умові безперервності потенціалу

$$\varphi_1 = \varphi_2 . \tag{18}$$

Усередині провідного тіла в умовах електростатики

$$E_{\text{пр}} = 0, \tag{19}$$

$$\varphi_{\text{пр}} = \text{const} .$$

2) безперервність нормальних складових вектору електричного зміщення

$$D_{1n} = D_{2n} , \tag{20}$$

де індекс n означає нормальну по відношенню до межі складову вектора $\vec{D}$.

У діелектрику на межі з провідником

$$D_n = D = \sigma,$$

де σ – щільність зарядів, розподілених по поверхні провідника.

Для розрахунку величин, що характеризують поле, можливі два способи розв'язання.

Один метод полягає в знаходженні $\vec{D}$ або $\vec{E}$ за допомогою теореми Гаусса в інтегральній формі запису (8) або (9) у всіх областях, а потім – у визначенні потенціалу в кожній області відповідно формулі (5).

Інший метод полягає в інтегруванні рівняння Пуассона (15) або Лапласа (16) в кожній області і визначенні довільних постійних, що входять в розв‘язок, виходячи з граничних умов.

Після знаходження потенціалу, як функції координат, визначають $\vec{E}$ з рівняння (14) і $\vec{D}$ за допомогою співвідношення (7).

Залежно від форми граничних поверхонь, зручними є різні системи координат, в яких відрізняються і форми запису рівнянь (14), (15), (16).

Так, наприклад, в декартових координатах *x*, *y*, *z* вони записуються в такий спосіб:

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k},$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}. \qquad (21)$$

В циліндричних координатах r, α, z:

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{r}_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial \alpha}\vec{\alpha}_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{z}_0,$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}. \qquad (22)$$

У сферичній системі координат r, θ, α:

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{r}_0 + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\vec{\theta}_0 + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\vec{\alpha}_0,$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial\varphi^2}{\partial\alpha^2}. \qquad (23)$$

Як відомо з математики, існує й інша форма запису операцій векторного аналізу за допомогою оператора Гамільтона і Лапласа:

$$\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi.$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi. \qquad (24)$$

Електростатичне поле має запас енергії W_e [Дж], який може бути в загальному випадку обчислений за формулою:

$$W_e = \int_V W_e' dV, \tag{25}$$

де V – об'єм, зайнятий полем;

W_e'– [Дж / м^3] – питома енергія електростатичного поля, що обчислюється за формулою:

$$W_e' = \frac{1}{2}\vec{D}\vec{E} = \frac{1}{2}DE = \frac{D^2}{2\varepsilon_a} = \frac{\varepsilon_a E^2}{2}. \tag{26}$$

2. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

Знайти закони зміни напруженості $\vec{E}$, електричного зміщення $\vec{D}$ і потенціалу φ уздовж радіуса двома способами: за допомогою інтегральних співвідношень і шляхом інтегрування рівнянь Пуассона і Лапласа. Побудувати в масштабі графіки отриманих залежностей. Визначити запас енергії електричного поля.

Умови завдання (рис.1).

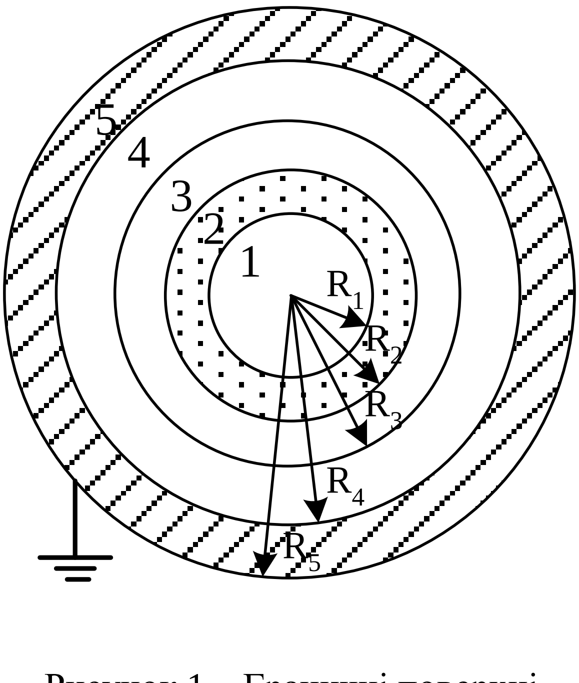

Рисунок 1 – Граничні поверхні

1. Форма граничних поверхонь – сфера.

2. Властивості середовищ в областях:

1 – діелектрик, $\varepsilon_1 = 1$;

2 – діелектрик, $\varepsilon_2 = 3$;

3 – діелектрик, $\varepsilon_3 = 2$;

4 – діелектрик, $\varepsilon_4 = 1$;

5 – метал.

3. Розподіл зарядів: заряд з постійною об'ємною щільністю ρ розподіляється за об’ємом області 2. Величина ρ_2 не задана.

4. Відомі величини: потенціал в центрі сфери $\varphi_0 = 1$кВ. Зовнішня металева оболонка заземлена.

Розміри:

$R_1 = 5$мм;

$R_2 = 15$мм;

$R_3 = 30$мм;

$R_4 = 40$мм;

$R_5 = 50$мм.

Розв‘язання

І спосіб

Визначимо закони зміни $\vec{E}$ і $\vec{D}$ в різних областях за допомогою інтегральної форми запису теореми Гаусса (8 і 9):

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = Q_0 , \qquad (27)$$

причому в силу симетрії заданої системи та симетричного розподілу зарядів в будь-якій точці простору, зайнятого полем, вектори $\vec{D}$ і $\vec{E}$ спрямовані радіально і по величині постійні при незмінному *r*. Якщо вибрати поверхню інтегрування *S* у вигляді сфери, то вектор елемента площі $d\vec{S}$, орієнтований по зовнішній нормалі до поверхні, буде також спрямований уздовж радіуса, тобто в кожній точці напрямки $\vec{D}$ і $d\vec{S}$ будуть однакові, і ліва частина (27) матиме такий вид:

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \oint_S DdS = D\oint_S dS = DS = D4\pi r^2 \,. \qquad (28)$$

У правій частині рівняння (27) знаходиться той сумарний заряд, який міститься всередині поверхні інтегрування *S*.

Цей заряд для різних областей простору є різним.

$0 \le r \le R_1 : Q_{01} = 0$ (В області I немає вільних зарядів).

По області 2 розподілений об'ємний заряд з постійною щільністю ρ_2. Тому для $R_1 \le r \le R_2$, $Q_{02} = \rho_2 \, \dfrac{4}{3}\pi\left(r^3 - R_1^3\right)$.

Заряд Q_{02} становить частину повного заряду Q_2 другої області:

$$Q_2 = \rho_2 \, \frac{4}{3}\pi\left(R_2^3 - R_1^3\right).$$

Для областей 3 і 4:

$$R_2 \le r \le R_3 \,, Q_{03} = Q_2 \,,$$

$$R_3 \le r \le R_4 \quad Q_{04} = Q_2 \,.$$

На внутрішній поверхні металевої оболонки 5 в результаті електростатичної індукції з'явиться заряд, рівний Q_2 за величиною і протилежний йому за знаком. Коли б зовнішня поверхня оболонки 5 не була заземлена, то на цій поверхні з’явився б заряд, рівний Q_2 і по величині, і за знаком, і електростатичне поле поширилося б у зовнішній простір, а величини, які його характеризують (*D*, *E*, φ) прагнули б до нуля лише при $r \to \infty$. Однак, при заземленні зовнішньої поверхні оболонки 5, як це має місце в завданні, заряди з цієї поверхні стікають в землю, і для області 5 отримаємо (при $R_4 \le r \le R_5$)

$$Q_{05} = Q_2 - Q_2 = 0 \,.$$

Прирівнюючи (28) до різних правих частин, одержимо вираз *D* для кожної з областей:

$$D_1 4\pi r^2 = 0 \,, \; D_1 = 0 \,, \; E_1 = 0 \,,$$

$$D_2 4\pi r^2 = \rho_2 \frac{4}{3}\pi\left(r^3 - R_1^3\right),$$

$$D_2 = \frac{\rho_2}{3}\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right),\ E_2 = \frac{\rho_2}{3\varepsilon_2\varepsilon_0}\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right),$$

$$D_3 \cdot 4\pi r^2 = \rho_2 \frac{4}{3}\pi\left(R_2^3 - R_1^3\right),$$

$$D_3 = \frac{\rho_2\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3r^2},$$

$$E_3 = \frac{\rho_2\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3\varepsilon_3\varepsilon_0 r^2},$$

аналогічно:

$$D_4 = \frac{\rho_2\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3r^2},\ E_4 = \frac{\rho_2\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3\varepsilon_4\varepsilon_0\, r^2}.$$

В заземленій металевій оболонці поле відсутнє:

$$D_5 4\pi r^2 = 0;\ D_5 = 0;\ E_5 = 0.$$

Потенціал $\varphi_5 = 0$ завдяки заземленню.

Таким чином, оболонка 5 є екраном, який концентрує електростатичне поле в замкнутому об’ємі $r \le R_4$.

При знаходженні виразів потенціалу згідно (5), фіксовану точку Р розташуємо на внутрішній поверхні заземленої оболонки. Хоча потенціал не залежить від шляху інтегрування, обчислити $\int\limits_l \vec{E}d\vec{l}$ можна лише в тому випадку, коли вектори $\vec{E}$ і $d\vec{l}$ збігаються за напрямком. Тобто, в даному випадку, слід обрати шлях інтегрування уздовж радіуса ($dl = dr$). Якщо цей шлях буде проходити по декількох областях, то необхідно розбити інтеграл на кілька складових. Знайдемо закон зміни потенціалу в областях 1–4:

$$\varphi_1 = \int_r^{R_1} E_1 dr + \int_{R_1}^{R_2} E_2 dr + \int_{R_2}^{R_3} E_3 dr + \int_{R_3}^{R_4} E_4 dr =$$

$$= 0 + \frac{\rho_2}{3\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\varepsilon_2}\int_{R_1}^{R_2}\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right)dr + \left(R_2^3 - R_1^3\right)\left(\frac{1}{\varepsilon_3}\int_{R_2}^{R_3}\frac{dr}{r^2} + \frac{1}{\varepsilon_4}\int_{R_3}^{R_4}\frac{dr}{r^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{\rho_2}{3\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{\varepsilon_2}\left[\frac{R_2^2 - R_1^2}{2} + R_1^3\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\right] + \left(R_2^3 - R_1^3\right)\left[\frac{1}{\varepsilon_3}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right) + \frac{1}{\varepsilon_4}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}\right)\right]\right\}$$

$$\varphi_2 = \int_r^{R_2} E_2 dr + \int_{R_2}^{R_3} E_3 dr + \int_{R_3}^{R_4} E_4 dr =$$

$$= \frac{\rho_2}{3\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{\varepsilon_2}\left[\frac{R_2^2 - R_1^2}{2} + R_1^3\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{r}\right)\right] + \left(R_2^3 - R_1^3\right)\left[\frac{1}{\varepsilon_3}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right) + \frac{1}{\varepsilon_4}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}\right)\right]\right\}$$

$$\varphi_3 = \int_r^{R_3} E_3 dr + \int_{R_3}^{R_4} E_4 dr =$$

$$= \frac{\rho_2\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_3}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_3}\right) + \frac{1}{\varepsilon_4}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}\right)\right),$$

$$\varphi_4 = \int_r^{R_4} E_4 dr = \frac{\rho_2\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3\varepsilon_0\varepsilon_4}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_4}\right).$$

Зважаючи на те, що за умовою $\varphi_0 = \varphi_1 = 1$ кВ, і підставляючи чисельні значення R_k і ε_k, можна обчислити ρ_2 і отримати шукані залежності $\varphi_k(r)$, $D_k(r)$, $E_k(r)$.

$$\rho_2 = 243{,}3 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^3, \quad \frac{\rho_2}{3\varepsilon_0} = 9{,}172 \cdot 10^6 \text{ В/м}^2,$$

$$\varphi_1 = 1000 \text{ В}, \quad D_1 = 0, \quad E_1 = 0,$$

$$\varphi_2 = \left(1114{,}65 - 1{,}529 \cdot 10^6 r^2 - \frac{0{,}3821}{r}\right)\text{В},$$

$$D_2 = 8{,}81\cdot10^{-6}\left(r-\frac{125\cdot10^{-9}}{r^2}\right)\ \text{Кл/м}^2,\ \ E_2 = 3{,}057\cdot10^{6}\left(r-\frac{125\cdot10^{-9}}{r^2}\right)\ \text{В/м},$$

$$\varphi_3 = \left(\frac{14{,}905}{r}-248{,}96\right)\ \text{В},\ \ D_3 = \frac{263{,}6\cdot10^{-12}}{r^2}\ \text{Кл/м}^2,\ \ E_3 = \frac{14{,}905}{r^2}\ \text{В/м},$$

$$\varphi_4 = \left(\frac{29{,}81}{r}-745{,}25\right)\ \text{В},\ \ D_4 = \frac{263{,}6\cdot10^{-12}}{r^2}\ \text{Кл/м}^2,\ \ E_4 = \frac{29{,}81}{r^2}\ \text{В/м}.$$

ІІ спосіб

Беручи до уваги центральну симетрію системи, для вирішення завдання виберемо сферичну систему координат, причому всі величини, що характеризують поле (E_k, D_k, φ_k), будуть залежати тільки від радіуса і не будуть залежати від інших сферичних координат.

У виразах (23) запис лівих частин рівнянь Пуассона та Лапласа спроститься і в них залишиться лише один доданок. Крім того, можна перейти від частинних похідних до звичайних похідних, оскільки потенціал є функцією однієї координати – *r*.

В області 2 поле описується рівнянням Пуассона, а в інших областях –рівнянням Лапласа. Причому $\varphi_5 = 0$, завдяки заземленню металевої оболонки. Розв‘яжемо ці рівняння для інших чотирьох областей:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi_1}{dr}\right)=0;\ r^2\frac{d\varphi_1}{dr}=C_1;\ \frac{d\varphi_1}{dr}=\frac{C_1}{r^2};\ \varphi_1=-\frac{C_1}{r}+C_2, \qquad (29)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi_2}{dr}\right)=-\frac{\rho_2}{\varepsilon_2\varepsilon_0};\ \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi_2}{dr}\right)=-\frac{\rho_2 r^2}{\varepsilon_2\varepsilon_0};\ r^2\frac{d\varphi_2}{dr}=-\frac{\rho_2 r^3}{3\varepsilon_2\varepsilon_0}+C_3,$$

$$\frac{d\varphi_2}{dr}=-\frac{\rho_2 r}{3\varepsilon_2\varepsilon_0}+\frac{C_3}{r^2};\ \varphi_2=-\frac{\rho_2 r^2}{6\varepsilon_2\varepsilon_0}-\frac{C_3}{r}+C_4. \qquad (30)$$

За аналогією з (27) отримаємо розв‘язок рівнянь Лапласа для інших областей:

$$\varphi_3 = -\frac{C_5}{r} + C_6, \tag{31}$$

$$\varphi_4 = -\frac{C_7}{r} + C_8. \tag{32}$$

Постійні інтегрування C_k в (29–32) визначимо за допомогою ρ_2 та φ_0, виходячи з граничних умов, а саме:

1) безперервність функції потенціалу при переході з однієї області в іншу;

2) безперервність нормальних складових вектора електричного зміщення на межі двох діелектриків.

Оскільки в даному випадку вектори $\vec{D}$ і $\vec{E}$ спрямовані радіально, тобто по нормалі до межі розділу середовищ, то повний вектор зміщення буде безперервний.

Зауважимо, що для визначення постійних C_k можна також скористатися тією умовою, що на межі діелектрика та провідника електричне зміщення в діелектрику D дорівнює щільності зарядів σ на поверхні провідника.

При $r = 0$ потенціал φ_1 повинен бути кінцевим. Отже, $C_1 = 0$, $\varphi_1 = C_2 = \varphi_0 = 1000$ В.

При $r = R_1$ $\varphi_1 = \varphi_2$:

$$C_2 = -\frac{\rho_2 R_1^2}{6\varepsilon_2\varepsilon_0} - \frac{C_3}{R_1} + C_4. \tag{33}$$

При $r = R_2$ $\varphi_2 = \varphi_3$:

$$-\frac{\rho_2 R_1^2}{6\varepsilon_2\varepsilon_0} - \frac{C_3}{R_2} + C_4 = -\frac{C_5}{R_2} + C_6. \tag{34}$$

При $r = R_3$ $\varphi_3 = \varphi_4$:

$$-\frac{C_5}{R_3} + C_6 = -\frac{C_7}{R_3} + C_8. \tag{35}$$

При $r = R_4$ $\varphi_4 = \varphi_5 = 0$:

$$-\frac{C_7}{R_4} + C_8 = 0,\ C_8 = \frac{C_7}{R_4}. \tag{36}$$

Виразимо в кожній області напруженість E_k і електричне зміщення D_k через потенціал φ_k, виходячи з співвідношень $\vec{E}_k = -\operatorname{grad}\varphi_k$. В даному випадку:

$$E_k = -\frac{d\varphi_k}{dr},\ D_k = \varepsilon_k \varepsilon_0 E_k,$$

$$E_1 = -\frac{d\varphi_1}{dr} = 0,\ D_1 = 0; \tag{37}$$

$$E_2 = -\frac{d\varphi_2}{dr} = \frac{\rho_2 r}{3\varepsilon_2\varepsilon_0} - \frac{C_3}{r^2}; \tag{38}$$

$$D_2 = \frac{\rho_2 r}{3} - \frac{\varepsilon_2\varepsilon_0 C_3}{r^2}; \tag{39}$$

$$E_3 = -\frac{d\varphi_3}{dr} = -\frac{C_5}{r^2}; \tag{40}$$

$$D_3 = -\frac{\varepsilon_3\varepsilon_0 C_5}{r^2}; \tag{41}$$

$$E_4 = -\frac{C_7}{r^2}; \tag{42}$$

$$D_4 = -\frac{\varepsilon_3\varepsilon_0 C_5}{r^2}. \tag{43}$$

При $r = R_1$ $D_2 = D_1 = 0$: $\dfrac{\rho_2 R_1}{3} - \dfrac{\varepsilon_2\varepsilon_0 C_3}{R_1^2} = 0$,

звідки

$$C_3 = \frac{\rho_2 R_1^3}{3\varepsilon_2\varepsilon_0}.$$

Підставимо константу C_3 в (39):

$$D_2 = \frac{\rho_2 r}{3} - \frac{\rho_2 R_1^3}{3r^2} = \frac{\rho_2\left(r^3 - R_1^3\right)}{3r^2}.$$

При $r = R_2$ $D_2 = D_3$:

$$\frac{\rho_2\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3R_2^2} = -\frac{\varepsilon_3\varepsilon_0 C_5}{R_2^2}, \quad C_5 = -\frac{\rho_2\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3\varepsilon_3\varepsilon_0}.$$

Підставимо константу C_5 в (41):

$$D_3 = \frac{\rho_2\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3r^2}.$$

При $r = R_3$ $D_3 = D_4$:

$$\frac{\rho_2\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3R_3^2} = -\frac{\varepsilon_4\varepsilon_0 C_7}{R_3^2},$$

звідки

$$C_7 = -\frac{\rho_2\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3\varepsilon_4\varepsilon_0}. \qquad (44)$$

Підставляючи C_7 в (43), отримаємо: $D_4 = \frac{\rho_2\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3r^2}$.

З виразу (36) з урахуванням (44) маємо:

$$C_8 = -\frac{\rho_2\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3\varepsilon_4\varepsilon_0 R_4}, \ \varphi_4 = \frac{\rho_2\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3\varepsilon_4\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_4}\right). \qquad (45)$$

Підставимо константи C_5, C_7, C_8 в (33) і визначимо C_6:

$$\frac{\rho_2\left(R_2^3-R_1^3\right)}{3\varepsilon_4\varepsilon_0 R_3}+C_6=\frac{\rho_2\left(R_2^3-R_1^3\right)}{3\varepsilon_4\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_4}\right),$$

$$C_6=\frac{\rho_2\left(R_2^3-R_1^3\right)}{3\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\varepsilon_3 R_3}+\frac{1}{\varepsilon_4}\left(\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_4}\right)\right],$$

$$\varphi_3=\frac{\rho_2\left(R_2^3-R_1^3\right)}{3\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\varepsilon_3}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_3}\right)+\frac{1}{\varepsilon_4}\left(\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_4}\right)\right].$$

Таким чином, можна з (34) визначити C_4, підставивши інші константи:

$$-\frac{\rho_2 R_2^2}{6\varepsilon_2\varepsilon_0}-\frac{\rho_2 R_1^3}{6\varepsilon_2\varepsilon_0 R_2}+C_4=\frac{\rho_2\left(R_2^3-R_1^3\right)}{3\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\varepsilon_3}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}\right)+\frac{1}{\varepsilon_4}\left(\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_4}\right)\right],$$

$$C_4=\frac{\rho_2}{3\varepsilon_0}\left\{\frac{R_2^2}{2\varepsilon_2}+\frac{R_1^2}{\varepsilon_2 R_2}+\left(R_2^3-R_1^3\right)\left[\frac{1}{\varepsilon_3}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}\right)+\frac{1}{\varepsilon_4}\left(\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_4}\right)\right]\right\}.$$

Підставляючи C_3 і C_4 в (30), отримаємо

$$\varphi_2=\frac{\rho_2}{3\varepsilon_0}\left\{\frac{R_2^2-r^2}{2\varepsilon_2}+\frac{R_1^3}{\varepsilon_2}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{r}\right)+\left(R_2^3-R_1^3\right)\left[\frac{1}{\varepsilon_3}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}\right)+\frac{1}{\varepsilon_4}\left(\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_4}\right)\right]\right\}$$

.

І, нарешті, з (33) виразимо C_2:

$$C_2=\frac{\rho_2}{3\varepsilon_0}\left\{\frac{R_2^2-R_1^2}{2\varepsilon_2}+\frac{R_1^3}{\varepsilon_2}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)+\left(R_2^3-R_1^3\right)\left[\frac{1}{\varepsilon_3}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}\right)+\frac{1}{\varepsilon_4}\left(\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_4}\right)\right]\right\}$$

.

З іншого боку, C_2 = 1000 В, тому з (44) можна визначити ρ_2 або $\frac{\rho_2}{3\varepsilon_0}$, причому їх значення збігаються зі знайденими першим способом.

Оскільки аналітичні вирази φ_k і D_k в двох способах також однакові, то після підстановки чисельних значень констант, в другому способі рішення вийдуть такі ж самі результати, що і в першому способі. Для побудови графіків обчислені значення величин зведені в таблицю 1.

Таблиця 1

***r*, мм**	**φ, В**	***D*, 10^{-9} Кл/м²**	***E*, В/м**
0	1000	0	0
5	1000	0	0
10	923,5	710	26,7
15	745,2	1171	44,2→66,3
20	496,7	659	37,3
25	347,7	442	23,8
30	248,4	293	16,6→33,1
35	106,5	215	24,3
40	0	165→0	18,6→0

Для обчислення запасу енергії електростатичного поля заданої системи скористаємося виразами (25) і (26), причому інтеграл в (25) розіб'ємо на три доданки, оскільки поле існує в другій, третій і четвертій областях.

Елементарний об'єм в (25) з урахуванням симетрії розраховується за формулою: $dV = 4\pi r^2 dr$. Наведемо математичні викладки:

$$W_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\int_{R_1}^{R_2} \varepsilon_2 E_2^2 dV + \int_{R2}^{R_3} \varepsilon_3 E_3^2 dV + \int_{R_3}^{R_4} \varepsilon_4 E_4^2 dV\right] =$$

$$= \frac{\rho_2^2}{18\varepsilon_0}\left[\int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\varepsilon_2}\left(r^2 - \frac{2R_1^3}{r} + \frac{R_1^6}{r^4}\right) 4\pi r^2 dr + \right.$$

$$\left. + \int_{R_2}^{R_3} \frac{1}{\varepsilon_3}\left(R_2^3 - R_1^3\right)\frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr + \int_{R_3}^{R_4} \frac{1}{\varepsilon_4}\left(R_2^3 - R_1^3\right)\frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr = \right.$$

$$= \frac{\rho_2^2 4\pi}{18\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\varepsilon_2}\left(\left.\frac{r^5}{5}\right|_{R_1}^{R_2} - \left.\frac{2R_1^3 r^2}{2}\right|_{R_1}^{R_2} - \left.\frac{R_1^6}{r}\right|_{R_1}^{R_2}\right) + \left(R_2^3 - R_1^3\right)^2\left(-\left.\frac{1}{r}\right|_{R_2}^{R_3}\frac{1}{\varepsilon_3} - \left.\frac{1}{r}\right|_{R_3}^{R_4}\frac{1}{\varepsilon_4}\right)\right] =$$

$$= \frac{\rho_2^2 10^9}{2}\left\{\frac{1}{\varepsilon_2}\left[\frac{R_2^{\,5} - R_1^5}{5} - R_1^3\left(R_2^2 - R_1^2\right) + R_1^6\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\right] +\right.$$

$$\left. + \left(R_2^3 - R_1^3\right)^2\left[\frac{1}{\varepsilon_3}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right) + \frac{1}{\varepsilon_4}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}\right)\right]\right\}.$$

Тут враховано, що $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}$ Ф / м.

Після підстановки числових значень отримаємо: $W_e = 7{,}816 \cdot 10^{-9}$ Дж.

Примітка.

В даному прикладі система мала центральну симетрію, а еквіпотенційні поверхні мали вигляд сфер. У разі, якщо система має осьову симетрію, а еквіпотенційні поверхні мають форму циліндрів, що передбачено в ряді варіантів, фізична сутність завдання і принципові підходи до її вирішення не зміняться в порівнянні з розглянутим вище. Іншими будуть лише математичні вирази. Це обумовлено тим, що при осьовій симетрії найбільш раціональною є циліндрична система координат.

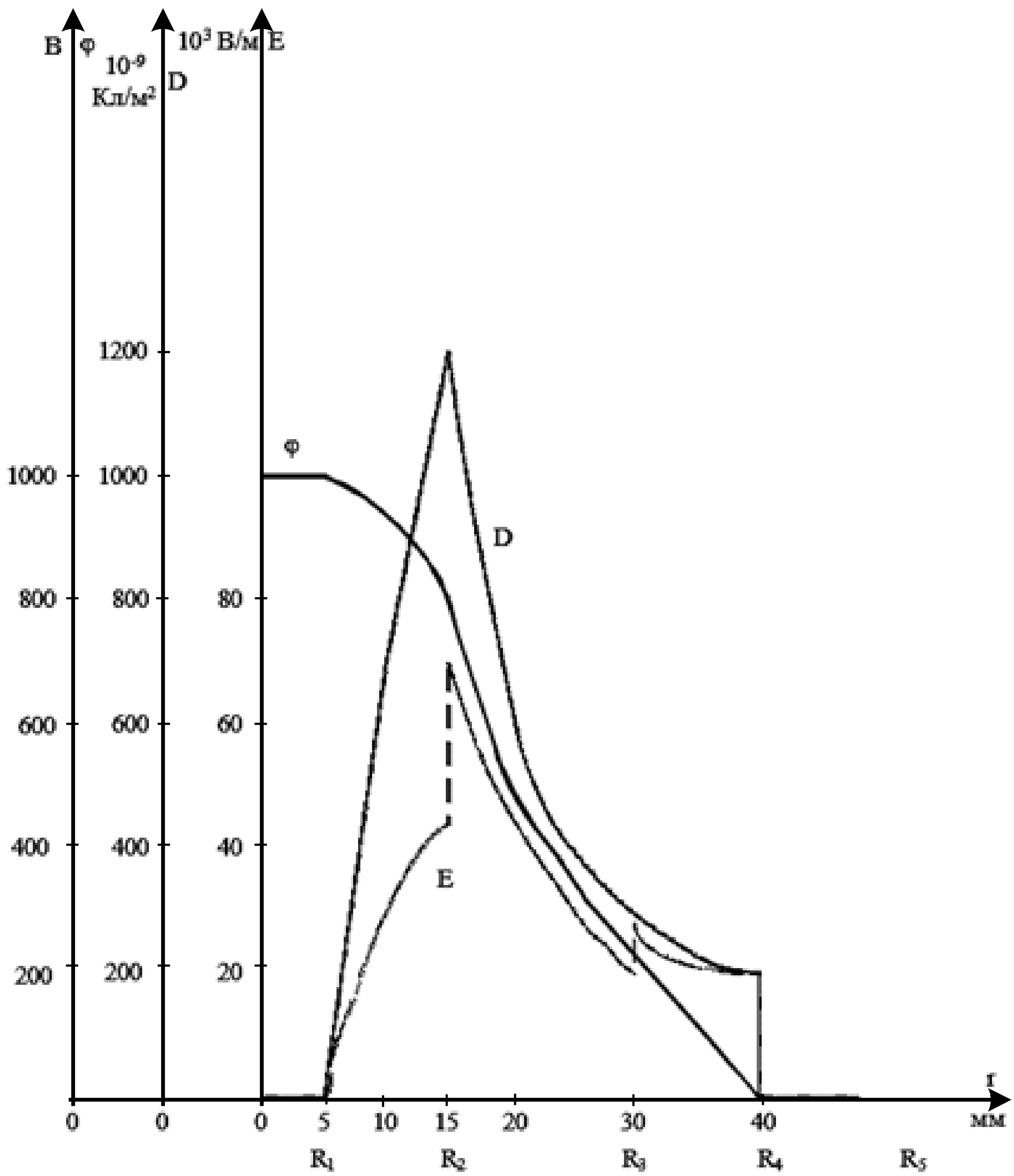

Рисунок 2. Графіки зміни величин

Завдання:

1. Знайти закони зміни напруженості E, електричного зміщення D і потенціалу φ в залежності від радіусу r двома способами: за допомогою інтегральних співвідношень і шляхом інтегрування рівнянь Пуассона і Лапласа.

2. Побудувати в масштабі графіки отриманих залежностей.

3. Визначити запас енергії електричного поля.

Таблиця 2. Варіанти завдань

№ вар.	**Форма граничної поверхні**	**Матеріал в областях**				
		1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	циліндр l=1 м	діел. $\varepsilon_1 = 5$	діел. $\varepsilon_2 = 3$	метал	діел. $\varepsilon_4 = 1$	метал
2		діел. $\varepsilon_1 = 2$	діел. $\varepsilon_2 = 1$		діел. $\varepsilon_4 = 3$	
3		діел. $\varepsilon_1 = 1$	діел. $\varepsilon_2 = 2$		діел. $\varepsilon_4 = 1$	
4		діел. $\varepsilon_1 = 3$	діел. $\varepsilon_2 = 2$		діел. $\varepsilon_4 = 4$	
5		діел. $\varepsilon_1 = 4$	діел. $\varepsilon_2 = 3$		діел. $\varepsilon_4 = 2$	
6	сфера	діел. $\varepsilon_1 = 1$	діел. $\varepsilon_2 = 2$	метал	діел. $\varepsilon_4 = 3$	метал
7		діел. $\varepsilon_1 = 2$	діел. $\varepsilon_2 = 1$		діел. $\varepsilon_4 = 1$	
8		діел. $\varepsilon_1 = 1$	діел. $\varepsilon_2 = 3$		діел. $\varepsilon_4 = 2$	
9		діел. $\varepsilon_1 = 3$	діел. $\varepsilon_2 = 2$		діел. $\varepsilon_4 = 1$	
10		діел. $\varepsilon_1 = 2$	діел. $\varepsilon_2 = 4$		діел. $\varepsilon_4 = 2$	
11	циліндр l=1 м	метал	діел. $\varepsilon_2 = 2$	діел. $\varepsilon_3 = 2$	діел. $\varepsilon_4 = 1$	метал
12			діел. $\varepsilon_2 = 2$	діел. $\varepsilon_3 = 3$	діел. $\varepsilon_4 = 1$	
13			діел. $\varepsilon_2 = 3$	діел. $\varepsilon_3 = 5$	діел. $\varepsilon_4 = 2$	
14			діел. $\varepsilon_2 = 4$	діел. $\varepsilon_3 = 1$	діел. $\varepsilon_4 = 2$	
15			діел. $\varepsilon_2 = 5$	діел. $\varepsilon_3 = 3$	діел. $\varepsilon_4 = 1$	
16	сфера	метал	діел. $\varepsilon_2 = 3$	діел. $\varepsilon_3 = 1$	діел. $\varepsilon_4 = 2$	метал
17			діел. $\varepsilon_2 = 5$	діел. $\varepsilon_3 = 3$	діел. $\varepsilon_4 = 1$	
18			діел. $\varepsilon_2 = 4$	діел. $\varepsilon_3 = 2$	діел. $\varepsilon_4 = 3$	
19			діел. $\varepsilon_2 = 2$	діел. $\varepsilon_3 = 3$	діел. $\varepsilon_4 = 4$	
20			діел. $\varepsilon_2 = 2$	діел. $\varepsilon_3 = 1$	діел. $\varepsilon_4 = 5$	
21	циліндр l=2 м	діел. $\varepsilon_1 = 2$	метал	діел. $\varepsilon_3 = 1$	діел. $\varepsilon_4 = 5$	метал
22		діел. $\varepsilon_1 = 2$		діел. $\varepsilon_3 = 1$	діел. $\varepsilon_4 = 5$	
23		діел. $\varepsilon_1 = 2$		діел. $\varepsilon_3 = 1$	діел. $\varepsilon_4 = 5$	
24		діел. $\varepsilon_1 = 2$		діел. $\varepsilon_3 = 1$	діел. $\varepsilon_4 = 5$	
25		діел. $\varepsilon_1 = 2$		діел. $\varepsilon_3 = 1$	діел. $\varepsilon_4 = 5$	
26	сфера	діел. $\varepsilon_1 = 4$	метал	діел. $\varepsilon_3 = 3$	діел. $\varepsilon_4 = 2$	метал
27		діел. $\varepsilon_1 = 2$		діел. $\varepsilon_3 = 3$	діел. $\varepsilon_4 = 1$	
28		діел. $\varepsilon_1 = 3$		діел. $\varepsilon_3 = 2$	діел. $\varepsilon_4 = 1$	
29		діел. $\varepsilon_1 = 5$		діел. $\varepsilon_3 = 3$	діел. $\varepsilon_4 = 2$	
30		діел. $\varepsilon_1 = 3$		діел. $\varepsilon_3 = 2$	діел. $\varepsilon_4 = 4$	
31	циліндр l=1 м	метал	діел. $\varepsilon_2 = 2$	діел. $\varepsilon_3 = 2$	діел. $\varepsilon_4 = 1$	метал
32			діел. $\varepsilon_2 = 2$	діел. $\varepsilon_3 = 3$	діел. $\varepsilon_4 = 1$	
33			діел. $\varepsilon_2 = 3$	діел. $\varepsilon_3 = 5$	діел. $\varepsilon_4 = 2$	
34			діел. $\varepsilon_2 = 4$	діел. $\varepsilon_3 = 1$	діел. $\varepsilon_4 = 2$	
35			діел. $\varepsilon_2 = 5$	діел. $\varepsilon_3 = 3$	діел. $\varepsilon_4 = 1$	

Продовження таблиці 2

№ вар.	Розміри, мм					Розподіл зарядів	Задані величини
	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5		
1	10	20	25	45	50	Заряд з щільністю ρ1 рівномірно розподілений за об'ємом області 1	$\rho_1=2\bullet10^{-6}$ Кл/м^3
2	20	40	50	75	80		$\rho_1=1\bullet10^{-6}$ Кл/м^3
3	30	50	60	90	100		$\rho_1=3\bullet10^{-6}$ Кл/м^3
4	15	30	40	60	65		$\rho_1=1{,}5\bullet10^{-6}$ Кл/м^3
5	5	25	50	75	100		$\rho_1=0{,}5\bullet10^{-6}$ Кл/м^3
6	10	20	25	45	50	Заряд з щільністю ρ1 рівномірно розподілений за об'ємом області 1	$\rho_1=1\bullet10^{-6}$ Кл/м^3
7	20	40	50	75	90		$\rho_1=2\bullet10^{-6}$ Кл/м^3
8	30	60	70	100	120		$\rho_1=3\bullet10^{-6}$ Кл/м^3
9	15	25	35	70	100		$\rho_1=1{,}5\bullet10^{-6}$ Кл/м^3
10	5	20	30	50	55		$\rho_1=0{,}5\bullet10^{-6}$ Кл/м^3
11	10	25	40	60	70	Заряд з щільністю ρ2 рівномірно розподілений за об'ємом області 2	$\rho_2=3\bullet10^{-6}$ Кл/м^3
12	15	30	50	70	100		$\rho_2=5\bullet10^{-6}$ Кл/м^3
13	5	15	25	45	50		$\rho_2=2{,}5\bullet10^{-6}$ Кл/м^3
14	5	25	50	80	100		$\rho_2=4\bullet10^{-6}$ Кл/м^3
15	8	20	40	80	90		$\rho_2=2\bullet10^{-6}$ Кл/м^3
16	15	30	50	80	90	Заряд з щільністю ρ2 рівномірно розподілений за об'ємом області 2	$\rho_2=3\bullet10^{-6}$ Кл/м^3
17	10	20	40	80	100		$\rho_2=2\bullet10^{-6}$ Кл/м^3
18	25	50	80	120	150		$\rho_2=2{,}5\bullet10^{-6}$ Кл/м^3
19	40	60	80	100	120		$\rho_2=0{,}4\bullet10^{-6}$ Кл/м^3
20	50	100	150	200	250		$\rho_2=0{,}5\bullet10^{-6}$ Кл/м^3
21	15	30	50	70	80	Заряд з невідомою щільністю ρ1 рівномірно розподілений за об'ємом області 1	на осі φ_0 = 2 кВ
22	10	25	50	60	100		на осі φ_0 = 1 кВ
23	20	50	80	100	110		на осі φ_0 = 4 кВ
24	5	10	20	40	50		на осі φ_0 = 0,5 кВ
25	25	50	75	100	120		на осі φ_0 = 2,5 кВ
26	20	25	50	75	100	Заряд з невідомою щільністю ρ1 рівномірно розподілений за об'ємом області 1	у центрі φ_0 = 1200 В
27	40	45	70	90	100		у центрі φ_0 = 400 В
28	15	20	40	60	80		у центрі φ_0 = 500 В
29	10	12	20	40	45		у центрі φ_0 = 1000 В
30	25	30	60	90	100		у центрі φ_0 = 1500 В
31	15	30	45	65	75	Заряд з невідомою щільністю ρ2 рівномірно розподілений за об'ємом області 2	на осі φ_0 = 1,5 кВ
32	10	25	45	65	95		на осі φ_0 = 2 кВ
33	10	20	30	50	55		на осі φ_0 = 4,5 кВ
34	5	20	45	75	105		на осі φ_0 = 2,5 кВ
35	10	45	60	80	95		на осі φ_0 = 3,5 кВ

Список літератури

1. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи / Л. А. Бессонов. – Москва : «Высшая школа», 1996. – 675 с.

2. . Нейман Л. Р. Теоретические основы электротехники : у 2 т. Т. 1 / Л. Р. Нейман, К. С. Демирчян – Ленинград : Энергоиздат, 1981. – 536 с.

3. Атабеков Г. И. Теоретические основы электротехники / Г. И. Атабеков. – Санкт-Петербург, Москва, Краснодар : «Лань», 2009. – 592 с.

4. Боев В. М. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле : учебное пособие / В. М. Боев. – Киев : ИСДО, 1994. – 276 с.

5. Боев В. М. Методические указания к самостоятельной работе над разделом «Теория электромагнитного поля. Уравнения Максвелла» по курсу «Теоретические основы электротехники» / В. М. Боев. – Харьков : ХПИ, 1991. – 72 с.